

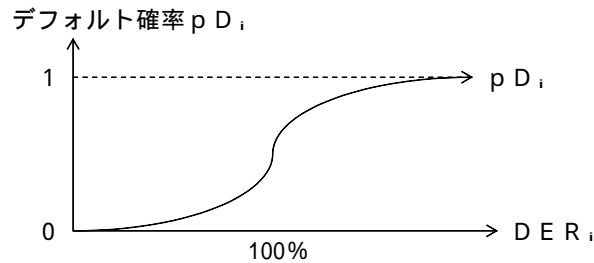
(2) 非線型のデフォルト確率モデル

線型確率モデルの2つの問題点を改善したものが、非線型のデフォルト確率モデルである。この非線型のデフォルト確率モデルはデフォルト確率曲線 pD_i を滑らかにしたモデル式である。ロジスティック関数で示される回帰モデルで、次式として表される。

$$pD_i = \frac{1}{1 + e^{-y_i}}$$

$$y_i = a + b \cdot DER_i$$

なお、 y_i は i 番目の企業の信用リスク度の推定値を表す。ここでは、詳細は割愛する。



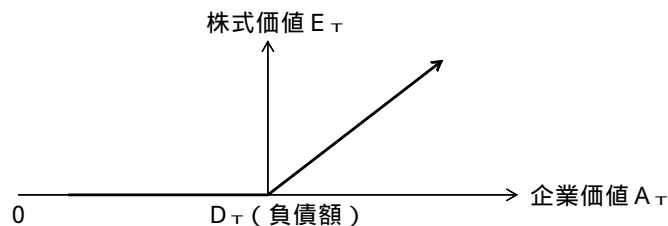
4. オプション・アプローチによるデフォルト確率の推定

(1) 株式価値

株式価値 E は、企業価値 A を原資産とし、負債額 D を権利行使価格とするヨーロッパ・タイプのコール・オプションのロング・ポジションである（第3章 第10節 オプションによる企業価値）。

よって、満期日 T における株式価値 E_T は、次式として表された。

$$E_T = \text{Max} (A_T - D_T, 0)$$



つまり、企業価値（資産価値） A_T が負債額（負債価値） D 以下であると債務超過となり、デフォルトが発生することになる。

(2) ブラック＝ショールズ・モデルによる株式価値

ブラック＝ショールズ・モデル（BSモデル）が成立する諸条件が満たされるとコール・オプションおよびプット・オプションは、次式として表された。

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

$$P = (-) S \cdot N(-d_1) + K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2)$$

$$\begin{cases} d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \\ d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T} \end{cases}$$

なお、 r はリスクフリー・レートである。

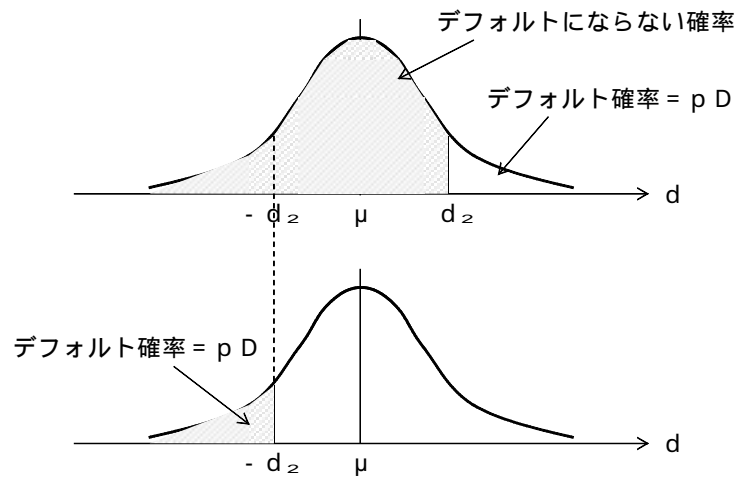
このBSモデル式の解釈は、次のとおりであった（第3章 第6節 オプションの評価モデル）。

$$C = \underbrace{S_0 \cdot N(d_1)}_{E(S_0)} - \underbrace{K \cdot N(d_2) \cdot e^{-rT}}_{K(t=0) \cdot \text{割引係数}} = \text{プレミアム (損益)}$$

ITMになる確率 (pointing to $N(d_1)$)
 $E(S_T)$ がITMになる確率 (pointing to $N(d_2)$)

つまり、コール・オプションの右辺第2項の $N(d_2)$ は、満期日 T における原資産価値（資産価値 A_T ）が権利行使価格である負債価値 D_T を上回る確率で、イン・ザ・マネー（ITM）になる確率を表している。言い換えれば、債務超過になる確率、つまり、デフォルトになる確率は、1から債務超過にならない確率 $N(d_2)$ を差し引いた値となる。

$$\text{デフォルト確率 } pD = 1 - N(d_2) = N(-d_2)$$



(3) デフォルト距離

オプション・アプローチによる係数 d_2 は、企業がデフォルトするまでの許容度を示す「デフォルト距離 (DD: Default Distance)」を表すものと理解されている。

このデフォルト距離 $DD (= pD)$ は、対数表示した満期の資産価値の期待値 $E[\ln(A_T)]$ と負債価値 $\ln(D_T)$ の差を、負債のボラティリティ $\sigma_A \cdot T$ で除した基準化した値 (相対表示) として表すことができる。

$$DD = pD = \frac{E[\ln(A_T)] - \ln(D_T)}{\sigma_A \cdot \sqrt{T}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{A_T}{D_T}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma_A \cdot \sqrt{T}} = d_2$$

絶対値表示

上記式の分子は、対数表示の満期資産価値の期待値から対数表示の負債額 (デフォルト・ポイント) を差し引いたもので、対数表示の絶対的なデフォルト距離を示している。

この値 (この差 = 距離) が大きければ大きいほどデフォルトする可能性が小さいことになる。

相対値表示

絶対的なデフォルト距離 (分子) が資産価値の標準偏差 σ_A の何倍になっているかを知るために、 $\sigma_A \cdot T$ で除すことによって相対的なデフォルト距離が計算される。