4. ブラック＝ショールズ・モデル

(1) ブラック＝ショールズ・モデルの計算式

ブラック＝ショールズ・モデルを用いたオプション・プレミアムの計算式は、次のとおりである。計算式そのものは非常にむずかしいが、内容は、バイノミアル・モデル（二項分布モデル）を、さらに一般化して次のような仮定（前提）をおいている。

【仮定（前提）】

① 原資産価格の変動は、連続的な対数正規分布に従う。
② 証券の空売りが可能で、売却代金は全額利用することができる。
③ 株式の配当がないヨーロピアン・タイプのオプションである。
④ 無リスク利子率は満期まで一定である。
⑤ 原資産のボラティリティは満期まで一定である。

基本的な意味は、バイノミアル・モデル同様に、期末におけるオプション価値の期待値をリスクフリー・レートで割引いたものである。

今、原資産価格をＳ、権利行使価格をＫ、リスクフリー・レートをｒ、満期日までの期間をＴ、標準正規分布の累積密度関数をＮ（ｄ）、満期までのボラティリティをσ（標準偏差）、Ｓ／Ｋの自然対数をln（Ｓ／Ｋ）、自然対数の底をｅとすると、コール・オプションのプレミアムＣ、プット・オプションのプレミアムＰは、次式として表わされる。

① **ｺｰﾙ･ﾌﾟﾚﾐｱﾑ…** $\mathbf{C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)}$

② **ﾌﾟｯﾄ･ﾌﾟﾚﾐｱﾑ…** $\mathbf{P = -SN(-d_1) + Ke^{-rT}N(-d_2)}$

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\cdot T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{cases}$$

＊　ＡＴＭではＳ／Ｋ＝１なので、ln（Ｓ／Ｋ）＝０である。

ブラック＝ショールズ・モデルを荒っぽく表現すれば、次のように言うことができる。

ＩＴＭになる確率　　　Ｅ（S_T）がＩＴＭになる確率

$$C = \boxed{S_0 \cdot \boxed{N(d_1)}} - \boxed{K \cdot \boxed{N(d_2)} \cdot e^{-rT}} = \text{プレミアム（損益）}$$

Ｅ（S_0）　　　Ｋ（ｔ＝０）　　　割引係数

(2) ＢＳモデルによるデルタ値

デルタ値は、原資産価格の変化（∂Ｓ）に対するプレミアムの変化（∂Ｃ、∂Ｓ）の比であるから、各オプションのプレミアム（Ｃ、Ｐ）を原資産価格で微分（∂：ラウンドと読む）して求めればよい。

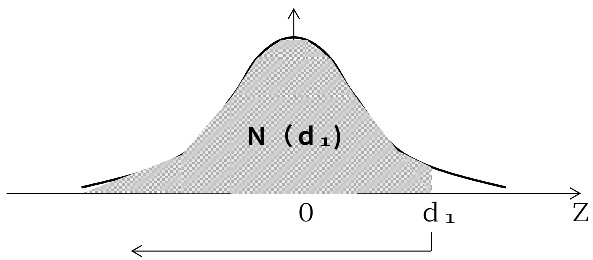
① コール・オプションのデルタ値

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\cdot\{SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)\}$$
$$\mathbf{= N(d_1)}$$

このＮ（d_1）の値は、標準正規分布において偏差がd_1以下の累積密度を表す。

標準正規分布の累積密度関数は、

$$N(d_1) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} \cdot dz$$



[標準正規分布表]

d_1	1.65	1.70	1.75	1.81	1.88	1.96	2.05	2.17	2.33	2.57
$N(d_1)$%	95.0	95.5	96.0	96.5	97.0	97.5	98.0	98.5	99.0	99.5

②　プット・オプションのデルタ値

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \cdot \{-SN(-d_1)+Ke^{-rT}N(-d_2)\}$$
$$= (-)\,N(-d_1)$$

[標準正規分布表]

d_1	-2.57	-2.33	-2.17	-2.05	-1.96	-1.88	-1.81	-1.75	-1.70	-1.65
$N(d_1)$%	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0

（注）N（d）は標準正規分布において偏差がd以下の累積密度を表す。

③　プットとコールのデルタ値の関係式

プット・オプションのデルタ値は、コール・オプションのデルタ値から１を引いたものである。

（コールのデルタ値）－１＝プットのデルタ値
$N(d_1)+N(-d_1)=1.0$

今、d_1=1.96とした場合の上記関係式を確認する。

$N(d_1)-1=(-)\,N(-d_1)$

$0.975-1=(-)\,0.025$

設例 No.15

下記データに基づいて、ブラック＝ショールズ・モデルによりコール・オプションの価格を算出しなさい。

［データ］
- 現時点の株価　13.100円
- 権利行使価格　14,000円
- 権利行使までの期間　３ヵ月（0.25＝３／12）
- 株価ボラティリティ（年率）　20%
- 安全資産利子率（年率）　３％

解答＆解説

①　先ず、累積確率密度関数N（d）のd及び（$d-\sigma\sqrt{T}$）を求める。

$$\cdot\ d = \frac{\ln\left(\frac{13{,}100}{14{,}000}\right) + \left\{0.03+\frac{0.2^2}{2}\right\}\times 0.25}{0.2\times\sqrt{0.25}}$$

$$= \frac{-0.06644+0.0125}{0.1} = (-)\,0.5394$$

$$\cdot\ d-\sigma\sqrt{T} = (-)\,0.5394-0.2\cdot\sqrt{0.25}$$
$$= (-)\,0.5394-0.1=(-)\,0.6394$$

②　標準正規分布表により、N（d）及びN（$d-\sigma\sqrt{T}$）を求める。

・$N(d)=N(-0.5394)$　0.2948

・$N(d-\sigma\sqrt{T})=N(-0.6394)$　0.2613

③　最後にコール・オプションのプレミアムを計算する。

$C=13{,}100\times0.2948-14{,}000\times e^{-0.03\times0.25}\times0.2613$

$=13{,}100\times0.2948-14{,}000\times2.71828^{-0.03\times0.25}\times0.2613$

$=3{,}861.88-3{,}630.87$

＝<u>231.01（円）</u>