８　ファクター･モデルとＡＰＴ

1. ファクター・モデル

ファクター・モデルとは、個別銘柄やポートフォリオのリターンがどのような要因（ファクター）によって形成されているかを明らかにするモデルである。

各銘柄の価格に影響するファクターを１つのファクターで説明しようとするモデルが「シングル・ファクター・モデル」であり、複数のファクターで説明しようとするものが「マルチ・ファクター・モデル」である。

(1) マーケット・モデル

シングル・ファクター・モデルの代表的なものがマーケット・モデルである。

マーケット・モデルは、市場ポートフォリオの超過リターンr_M（$=R_M-R_F$）で個別銘柄の超過リターンr_i（$=R_i-R_F$）を説明しようとするモデルで、いわゆる１次回帰分析で得られた証券特性線（ＳＭＬ）である。かつ、単一のファクター（市場ポートフォリオの超過リターンr_M）で説明するモデルである。単一のファクターで説明するモデルをシングル・ファクター・モデルという。

$$r_i=\alpha_i+\beta_i\cdot r_M+\varepsilon_i$$

なお、α_iは銘柄ｉのジェンセンのα値、ε_iは残差項である。

① **期待値**

個別銘柄ｉの超過リターンの期待Ｅ（r_i）、μ_iは次式として表される。

$$E(r_i)=\mu_i=\alpha_i+\beta_i\cdot\mu_M$$

② **分散**

各銘柄間に相関がないこと、銘柄固有リターン（α_i）は定数であるからリスクはゼロである。よって、分散σ_i^2は次式として表される。

$$\sigma_i^2=\beta_i^2\cdot\sigma_M^2+\sigma_{\varepsilon i}^2$$

(2) マルチファクター・モデル

マルチ・ファクター・モデルは、いわゆるマクロファクター・モデルである。マクロ経済変数，ファクターF_k（例えば、ＧＤＰ、為替レート、鉱工業生産指数など）で、個別銘柄の超過リターンr_iを説明しようとするモデルである。次式として表される。

$$r_i=a_i+\sum_{k-1}^{K}b_{i.k}F_k+\varepsilon_i$$

なお、ｋはファクターの数（ｋ＝１、２、……、Ｋ）、a_iは銘柄ｉの固有のリターン、$b_{i.k}$は銘柄ｉのファクターｋの反応度（エクスポージャー）、ε_iは残差項である。

(3) ファーマ＝フレンチの３ファクター・モデル

ファーマ＝フレンチの３ファクター・モデルは、マーケット・モデルに、サイズ・ファクターF_Sとバリュー・ファクターF_Vという２つのファクターを追加したものである。次式として表される。

①サイズ・ファクター：F_S ＝（スモール・サイズの平均リターン）
　　　　　　　　　　　　　－（ビッグ・サイズの平均リターン）
　　　　　　　　　　　　＝（時価総額の小さい銘柄の平均リターン）
　　　　　　　　　　　　　－（時価総額の大きい銘柄の平均リターン）
②バリュー・ファクター：F_V ＝（高いバリューの平均リターン）
　　　　　　　　　　　　　－（低いバリューの平均リターン）

（注）　バリューについての分類はＢＰＲ（ＰＢＲの逆数）によって測定されている。

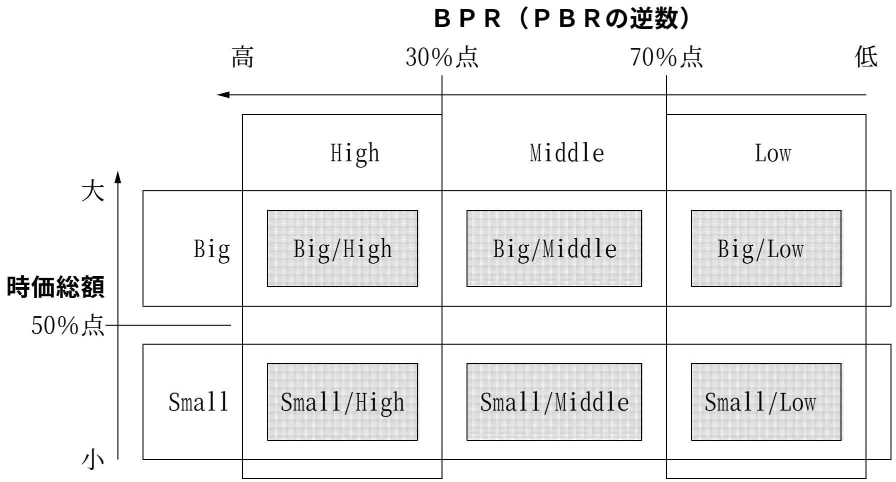
よって、ファーマ＝フレンチの３ファクター・モデルは、次式として表される。

$$r_i=\alpha_i+\beta_i\cdot r_M+\beta_{iS}\cdot F_S+\beta_{iV}\cdot F_V+\varepsilon_i$$

なお、α_iは銘柄ｉのジェンセンのα値、β_{iS}はサイズ・ファクターの反応度、β_{iV}はバリュー・ファクターの反応度である。

ファーマ＝フレンチは、バリューの判定尺度としてＢＰＲ（ＰＢＲの逆数）をとり、それを上位30%点と70%点を測定し、３つにグループ分けをし、時価総額（サイズ）については50%点を測定し、２つのグループ分けをしている。よって、６つのグループに分けられる。

［ファーマ＝フレンチの基本の６グループ・スタイル］



⑷　ファンダメンタル・ファクター・モデル

銘柄間のリターンの格差は銘柄特性（ないし属性）の格差に起因するものであるとし、平均的（標準的＝ベンチ・マーク）な銘柄からの特性の格差を反応度（エクスポージャー）b_{ik}として、そこからスタートする単位投資期間（１カ月、１四半期など）でのファクター・リターンF_kを推定する。次式として表される。なお、F_oは平均的（標準的）な銘柄のリターン、ε_iは特性ないし属性などで説明できない部分である。

$$\boldsymbol{r_i = F_o + \sum_{k-1}^{K} b_{i.k} F_k + \varepsilon_i}$$

2. 裁定価格理論

裁定価格理論（ＡＰＴ）は、市場が均衡する場合には、投資家の間で裁定取引により利益を確保する機会がないという仮定をおいている。ＣＡＰＭの場合でも、既述したようにＳＭＬ上の投資収益率と実際の投資収益率との差をα（ジェンセンのアルファ）としてとらえ、証券価格の過大（または過小）評価の基準としている。従って、ＣＡＰＭが仮定としている、充分に分散された市場ポートフォリオの投資収益率を変数(ファクター)とするのではなく、多数の変数(ファクター)によって投資収益率が代表され、裁定取引がなくなる状況下での価格形成を考えるのが裁定価格理論（ＡＰＴ）である。この仮定の他に、次の仮定をおいている。

①　資本市場は、完全な競争的市場であること（ＣＡＰＭと同じ）

②　投資家は、同質的（選好、収益率の生成）な期待をもっていること

③　投資家は、収益率の生成過程（証券に影響するｋ個のファクターの存在）を知っていること

④　証券の銘柄数ｎは、ファクターの数ｋより多い（ｎ＞ｋ）

⑴　シングル・ファクター・モデルからのＡＰＴの導出

シングル・ファクター・モデルからＡＰＴの均衡価格条件式を導出する。

①　シングル・ファクター・モデルの期待投資収益率

シングル・ファクター・モデルにおける個別リスク証券ｉの投資収益率R_iは、次式として表された。

$$R_i = a_i + b_i F + \varepsilon_i$$

よって、期待投資収益率Ｅ（R_i）も、

$$\boldsymbol{E(R_i) = a_i + b_i E(F)}$$

と表された。

仮に、個別証券ｉがファクター（Ｆ）に反応しないのであれば、ファクターに対する反応度（b_i）はゼロになり、個別証券の期待値Ｅ(R_i）はa_iに等しくなる。また、ファクター反応度(b_i）がゼロであれば個別証券ｉはリスクに反応しないのであるから、期待値Ｅ（R_i）は無リスク証券の投資収益率R_Fということになる。

（ア）$\boldsymbol{b_i = 0}$　であれば　$\boldsymbol{a_i = 1}$

$$E(R_i) = a_i$$
$$E(R_i) = R_F$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a_i = R_F}$$

となる。